Chapitre 9
Isométries d'un espace euclidien

Exercice 1 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 2 : On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

On définit l'application $\varphi : E \to E$ par $\varphi(P(X)) = P(1-X)$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.
3. Montrer que φ est une symétrie. Déterminer ses caractéristiques.
4. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 3 : Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathrm{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors u est une symétrie orthogonale.

Exercice 4 : Déterminer les matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 : Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Exercice 6 : Déterminer les matrices $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers.

Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i,j)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$(i)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \qquad (iii)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i,j,k)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$(i)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$(iii)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (iv)\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix},$$

$$(v)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

1. Pour quels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$?
2. Étudier l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i,j,k) serait A dans ces cas.

Exercice 10 : Diagonaliser les matrices symétriques réelles suivantes avec une matrice de passage orthogonale.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. Montrer que s'il existe une matrice symétrique $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $A = B^2$, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Montrer la réciproque.

Exercice 12 : Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une symétrique.

1. Montrer l'inégalité $4\det(A) \leqslant \mathrm{Tr}(A)^2$.
2. Pour quelle matrice A a-t-on une égalité ci-dessus ?

Exercice 13 : Soit $\mathscr{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j). Étudier les coniques de $\mathscr{P}$ données par les équations suivantes dans le repère (O, i, j).

(i) $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$,

(ii) $\mathscr{C}_2 : x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$,

(iii) $\mathscr{C}_3 : 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$,

(iv) $\mathscr{C}_4 : x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$.